ΜΑΘΗΜΑ 47
ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ 3η ΔΕΚΑΔΑ

Όχι βιαστικά, όχι αργά.
Στο ρυθμό σου.

21.

Έστω συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$ με συνεχή δεύτερη παράγωγο που ικανοποιεί τις σχέσεις $f(0) = 2f'(0) = 1$ και $f''(x)f(x) + (f'(x))^2 = f(x)f'(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

i) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $h(x) = \dfrac{f(x)f'(x)}{e^x}$ είναι σταθερή

ii) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f.

iii) Αν g συνεχής συνάρτηση με πεδίο ορισμού και σύνολο τιμών το [0, 1], δείξτε ότι η εξίσωση $2x - \int_0^x \dfrac{g(t)}{1+f^2(t)}dt = 1$ έχει μία μόνο ρίζα στο διάστημα (0, 1).

Προτεινόμενη λύση

i)

Η h είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$h'(x) = \frac{(f(x)f'(x))' e^x - e^x f(x)f'(x)}{e^{2x}}$$
$$= \frac{f''(x)f(x)e^x + (f'(x))^2 e^x - e^x f(x)f'(x)}{e^{2x}}$$
$$= \frac{e^x[f''(x)f(x) + (f'(x))^2 - f(x)f'(x)]}{e^{2x}}$$
$$= \frac{0}{e^x} = 0$$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, άρα $h(x) = c$

ii)

$h(x) = c \Leftrightarrow \dfrac{f(x)f'(x)}{e^x} = c \Leftrightarrow f(x)f'(x) = ce^x$. **(1)**

Για $x = 0$ έχουμε $f(0)f'(0) = c \Leftrightarrow 1 \cdot \dfrac{1}{2} = c \Leftrightarrow c = \dfrac{1}{2}$ οπότε

Η (1) γίνεται $f(x)f'(x) = \dfrac{1}{2}e^x \Leftrightarrow 2f(x)f'(x) = e^x$

$(f^2(x))' = (e^x)'$

$f^2(x) = e^x + c_1$ **(2)**

Για $x = 0$ έχουμε $f^2(0) = e^0 + c_1 \Leftrightarrow 1^2 = 1 + c_1 \Leftrightarrow c_1 = 0$

Η (2) γίνεται $f^2(x) = e^x \Leftrightarrow f(x) = \pm\sqrt{e^x} \neq 0$

Επειδή η f είναι συνεχής και δεν μηδενίζεται, θα έχει σταθερό πρόσημο.

Και αφού $f(0) = 1 > 0$, θα είναι και $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, άρα $f(x) = \sqrt{e^x}$.

iii)

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi(x) = 2x - \int_0^x \frac{g(t)}{1+f^2(t)}dt - 1$

$$= 2x - \int_0^x \frac{g(t)}{1+(\sqrt{e^t})^2}dt - 1$$

$$= 2x - \int_0^x \frac{g(t)}{1+e^t}dt - 1 \ , \quad x \in [0,\ 1]$$

Η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $[0,\ 1]$ άρα και η $\frac{g(t)}{1+e^t}$.

Άρα το ολοκλήρωμα είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση, άρα και συνεχής .

Επομένως η φ είναι συνεχής στο $[0,\ 1]$ σαν πράξεις συνεχών **(3)**

$\varphi(0) = -1 < 0$ **(4)**

$\varphi(1) = 1 - \int_0^1 \frac{g(t)}{1+e^t}dt$ **(5)**

όμως $0 \le g(t) \le 1 \Rightarrow 0 \le \frac{g(t)}{1+e^t} \le \frac{1}{1+e^t} < 1$ **(6)**

$$\frac{g(t)}{1+e^t} - 1 < 0$$

$$\int_0^1 \left(\frac{g(t)}{1+e^t} - 1\right)dt < 0$$

$$\int_0^1 \frac{g(t)}{1+e^t}dt - \int_0^1 1dt < 0$$

$$\int_0^1 \frac{g(t)}{1+e^t}dt - 1 < 0$$

$$1 - \int_0^1 \frac{g(t)}{1+e^t}dt > 0 \overset{(4)}{\Rightarrow} \varphi(1) > 0 \quad \textbf{(7)}$$

Από τις (3), (4), (7) με θεώρημα Bolzano , θα υπάρχει $\xi \in (0\ ,\ 1)$ ώστε $\varphi(\xi) = 0$.

Για τη μοναδικότητα : Είναι $\varphi'(x) = 2 - \frac{g(x)}{1+e^x} > 0$ λόγω της (6) .

Επομένως η φ είναι γνησίως αύξουσα,
άρα η ρίζα είναι μοναδική

Έχε υπόψη σου:
Σε ημιτελή παρουσίαση άσκησης, τίποτα δε βαθμολογείται αρνητικά.
Παρουσιάζουμε κάθε σκέψη που κατέβασε η κούτρα μας

22.

Για συνεχή συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, δίνεται ότι $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-e^{2x}+1}{\eta\mu 2x}=5$

i) Να βρείτε την τιμή $f(0)$

ii) Να δείξετε ότι η f παραγωγίζεται στο $x_o=0$

iii) Αν $h(x)=e^{-x}f(x)$, να δείξετε ότι οι εφαπτόμενες των C_f, C_h στα σημεία $A(0,f(0))$ και $B(0,h(0))$ αντίστοιχα, είναι παράλληλες.

Προτεινόμενη λύση

i)

Θέτουμε $\dfrac{f(x)-e^{2x}+1}{\eta\mu 2x}=g(x)$ **(1)**, οπότε $\lim\limits_{x\to 0}g(x)=5$

Κοντά στο 0, η (1) $\Rightarrow$ $f(x)=g(x)\eta\mu 2x+e^{2x}-1$ **(2)**

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\left(g(x)\eta\mu 2x+e^{2x}-1\right)=5\cdot 0+1-1=0$$

Αλλά, f είναι συνεχής $\Rightarrow$ $f(0)=\lim\limits_{x\to 0}f(x)$

$f(0)=0$

ii)

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}\overset{(2)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{g(x)\eta\mu 2x+e^{2x}-1}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(g(x)\frac{\eta\mu 2x}{x}+\frac{e^{2x}-1}{x}\right)\quad \textbf{(3)}$$

Όμως $\lim\limits_{x\to 0}\left(g(x)\dfrac{\eta\mu 2x}{x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}g(x)\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\eta\mu 2x}{2x}=5\cdot 2=10$

Και $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{x}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2e^{2x}}{1}=2$

(3) $\Rightarrow$ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=12$ $\Rightarrow$ $f'(0)=12$

iii)

$$\lim_{x\to 0}\frac{h(x)-h(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x}f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}e^{-x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=1\cdot 12=12$$

δηλαδή $h'(0)=12=f'(0)$

Επομένως οι εφαπτόμενες στα $A(0,f(0))$, $B(0,h(0))$ είναι παράλληλες

> Σε διαγώνισμα:
> Αν δεν προλαβαίνουμε να παρουσιάσουμε τη λύση, την περιγράφουμε

23.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{\lambda x}$, $\lambda > 0$

i) Δείξτε ότι είναι γνησίως αύξουσα

ii) Δείξτε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f, η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων, είναι η $y = \lambda e x$. Βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου επαφής M

iii) Δείξτε ότι το εμβαδόν $E(\lambda)$ του χωρίου που ορίζεται από τη C_f, την εφαπτομένη στο M και τον άξονα $y'y$ είναι $E(\lambda) = \dfrac{e-2}{2\lambda}$

iv) Να υπολογίσετε το όριο $\displaystyle\lim_{\lambda \to +\infty} \frac{\lambda^2 \cdot E(\lambda)}{2 + \eta\mu\lambda}$.

Προτεινόμενη λύση

Είναι $D_f = \mathbb{R}$, αφού η f είναι εκθετική.

i)

$f'(x) = \lambda e^{\lambda x} > 0 \quad \Rightarrow \quad f$ γνησίως αύξουσα

ii)

Εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(x_o, f(x_o))$:

$$y - f(x_o) = f'(x_o)(x - x_o)$$
$$y - e^{\lambda x_o} = \lambda e^{\lambda x_o}(x - x_o)$$
$$y = \lambda e^{\lambda x_o} x - \lambda e^{\lambda x_o} x_o + e^{\lambda x_o}$$

Επειδή η εφαπτομένη αυτή διέρχεται από το σημείο $O(0, 0)$, θα έχουμε

$$-\lambda e^{\lambda x_o} x_o + e^{\lambda x_o} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^{\lambda x_o}(-\lambda x_o + 1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_o = \frac{1}{\lambda}$$

Οπότε η εξίσωση της εφαπτομένης γίνεται $y = \lambda e x \quad \Leftrightarrow \quad g(x) = \lambda e x$

το δε σημείο επαφής M είναι $M\left(\dfrac{1}{\lambda}, f\left(\dfrac{1}{\lambda}\right)\right) = M\left(\dfrac{1}{\lambda}, e\right)$

iii)

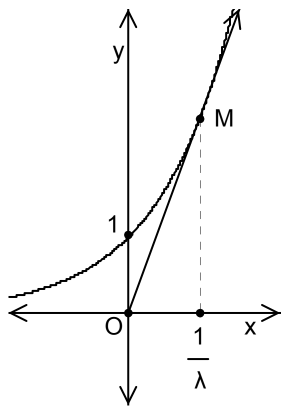
Το διάστημα ολοκλήρωσης είναι το $\left[0, \dfrac{1}{\lambda}\right]$, στο οποίο

η διαφορά $f(x) - g(x) = e^{\lambda x} - \lambda e x$ είναι συνεχής

Επειδή δε $f''(x) = \lambda^2 e^{\lambda x} > 0$, η f είναι κυρτή.

Επομένως η C_f είναι ψηλότερα από την εφαπτομένη στο M, οπότε $f(x) - g(x) \geq 0$.

Το ζητούμενο εμβαδόν είναι



$$E(\lambda) = \int_0^{\frac{1}{\lambda}} (e^{\lambda x} - \lambda e x)dx = \left[\frac{1}{\lambda}e^{\lambda x} - \lambda e \frac{x^2}{2}\right]_0^{\frac{1}{\lambda}}$$
$$= \frac{1}{\lambda}e - \lambda e \frac{1}{2\lambda^2} - \frac{1}{\lambda}$$
$$= \frac{1}{\lambda}e - \frac{1}{2\lambda}e - \frac{1}{\lambda} = \frac{e-2}{2\lambda}$$

iv)

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \frac{\lambda^2 \cdot E(\lambda)}{2 + \eta\mu\lambda} = \lim_{\lambda \to +\infty} \frac{\lambda^2 \cdot \frac{e-2}{2\lambda}}{2 + \eta\mu\lambda} = \lim_{\lambda \to +\infty} \frac{\lambda(e-2)}{4 + 2\eta\mu\lambda} = \lim_{\lambda \to +\infty} \frac{e-2}{\frac{4}{\lambda} + 2\frac{\eta\mu\lambda}{\lambda}} \qquad \textbf{(1)}$$

Είναι $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\dfrac{4}{\lambda}=0$ **(2)**

$$\left|\frac{\eta\mu\lambda}{\lambda}\right| \le \frac{1}{\lambda} \quad\Leftrightarrow\quad -\frac{1}{\lambda} \le \frac{\eta\mu\lambda}{\lambda} \le \frac{1}{\lambda}$$

αλλά $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}-\dfrac{1}{\lambda}=0=\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\dfrac{1}{\lambda}$

Από το κριτήριο παρεμβολής θα είναι και $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\dfrac{\eta\mu\lambda}{\lambda}=0$ **(3)**

Είναι $e-2>0$ **(4)**

Λόγω των (2), (3), (4) η (1) γίνεται $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\dfrac{\lambda^2\cdot E(\lambda)}{2+\eta\mu\lambda}=+\infty$

Γενικά:
Σε περίπτωση αδιέξοδου, χρησιμοποιείστε Θ.Μ.Τ

24.

Έστω η συνάρτηση $f(x) = 2 + (x-2)^2$, $x \geq 2$

i) Να αποδείξετε ότι είναι "1—1"

ii) Να αποδείξετε ότι αντιστρέφεται και να βρείτε τον τύπο της αντίστροφης f^{-1}

iii) Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και f^{-1} με την ευθεία $y = x$.

iv) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περιέχεται μεταξύ των C_f , $C_{f^{-1}}$.

Προτεινόμενη λύση

i)

Η f είναι συνεχής στο $A = [2, +\infty)$ με $f'(x) = 2(x-2) > 0$ για κάθε $x > 2$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[2, +\infty)$, άρα και '1—1'

ii)

Αφού η f είναι '1—1', αντιστρέφεται.

$f(2) = 2$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} [2 + (x-2)^2] = \lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty \Rightarrow f(A) = [2,+\infty)$

Άρα $f^{-1} : [2,+\infty) \to [2,+\infty)$

Για τον τύπο της f^{-1}: $y = f(x) \Leftrightarrow$

$$y = 2 + (x-2)^2$$
$$(x-2)^2 = y-2$$
$$x-2 = \sqrt{y-2}$$
$$x-2 = \sqrt{y-2} \Leftrightarrow x = 2 + \sqrt{y-2}$$

Συνεπώς : $f^{-1}(x) = 2 + \sqrt{x-2}$

iii)

$f(x) = x \Leftrightarrow$

$$2 + (x-2)^2 = x$$
$$x^2 - 5x + 6 = 0$$
$$x = 2 \ \text{ή} \ x = 3$$

Τα κοινά σημεία των C_f, $y = x$ είναι τα $(2, 2)$, $(3, 3)$

Επειδή η ευθεία $y = x$ είναι άξονας συμμετρίας των C_f, $C_{f^{-1}}$, τα ίδια σημεία είναι τα κοινά των $C_{f^{-1}}$, $y = x$.

iv)

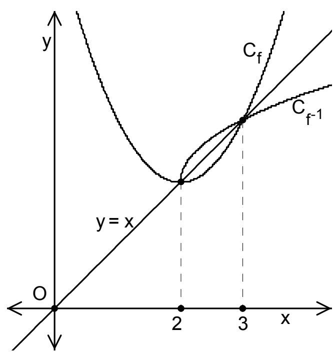
Το διάστημα ολοκλήρωσης είναι το $[2, 3]$

Πρόσημο της διαφοράς $f(x) - x$ στο $[2, 3]$: $f(x) - x \geq 0$

$$x^2 - 5x + 6 \geq 0$$
$$x \leq 2 \ \text{ή} \ x \geq 3$$

Άρα στο διάστημα $[2, 3]$ είναι $f(x) - x \leq 0$, πράγμα που σημαίνει ότι η C_f είναι χαμηλότερα από την $y = x$, και λόγω της συμμετρίας η $C_{f^{-1}}$ θα είναι ψηλότερα από την $y = x$, επομένως ψηλότερα και από την C_f, δηλαδή $f^{-1}(x) - f(x) \geq 0$.

Το ζητούμενο εμβαδόν είναι



$$E = \int_2^3 \left(f^{-1}(x) - f(x)\right)dx = \int_2^3 \left(2 + \sqrt{x-2} - 2 - (x-2)^2\right) dx$$

$$= \int_2^3 \left(2+\sqrt{x-2}-2-\left(x^2-4x+4\right)\right) dx$$
$$= \int_2^3 \left(2+\sqrt{x-2}-2-x^2+4x-4\right) dx$$
$$= \int_2^3 \left(\sqrt{x-2}-x^2+4x-4\right) dx$$
$$= \int_2^3 ((x-2)^{\frac{1}{2}}-x^2+4x-4)dx$$
$$= \left[\frac{(x-2)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}-\frac{x^3}{3}+4\frac{x^2}{2}-4x\right]_2^3 = \frac{1}{3} \text{ τετραγωνικές μονάδες}$$

.

25.

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z_1, z , z_3 τέτοιοι ώστε

$$|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1 \quad \text{και} \quad z_1 + z_2 + z_3 = 0$$

Να δείξετε ότι

i) $|z_1 - z_2| = |z_3 - z_1| = |z_2 - z_1|$

ii) $|z_1 - z_2|^2 \leq 4$ και $\text{Re}(z_1\overline{z}_2) \geq -1$

iii) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των z_1, z_2, z_3 και το είδος του τριγώνου που έχει κορυφές αυτές τις εικόνες.

Προτεινόμενη λύση

i)

Αρκεί να αποδείξουμε ότι $|z_1 - z_2| = |z_3 - z_1|$

Αλλά $z_1 + z_2 + z_3 = 0 \Rightarrow z_1 = -z_2 - z_3$

Οπότε αρκεί

$$|-z_2 - z_3 - z_2| = |z_3 + z_2 + z_3|$$

$$|2z_2 + z_3| = |2z_3 + z_2|$$

$$|2z_2 + z_3|^2 = |2z_3 + z_2|^2$$

$$(2z_2 + z_3)(\overline{2z_2 + z_3}) = (2z_3 + z_2)(\overline{2z_3 + z_2})$$

$$(2z_2 + z_3)(2\overline{z}_2 + \overline{z}_3) = (2z_3 + z_2)(2\overline{z}_3 + \overline{z}_2)$$

$$4z_2\overline{z}_2 + 2z_2\overline{z}_3 + 2z_3\overline{z}_2 + z_3\overline{z}_3 = 4z_3\overline{z}_3 + 2z_3\overline{z}_2 + 2z_2\overline{z}_3 + z_2\overline{z}_2$$

$$4|z_2|^2 + |z_3|^2 = 4|z_3|^2 + |z_2|^2$$

$4.\ 1 + 1 = 4.\ 1 + 1$ που ισχύει

Ομοίως αποδεικνύεται ότι $|z_3 - z_1| = |z_2 - z_1|$

ii)

$|z_1 - z_2| = |z_1 + (-z_2)| \leq |z_1| + |-z_2| = 1 + 1 = 2$, δηλαδή $|z_1 - z_2| \leq 2 \Rightarrow$

$|z_1 - z_2|^2 \leq 4$

$$|z_1 - z_2|^2 \leq 4 \Leftrightarrow (z_1 - z_2)(\overline{z_1 - z_2}) \leq 4$$

$$(z_1 - z_2)(\overline{z}_1 - \overline{z}_2) \leq 4$$

$$z_1\overline{z}_1 - z_1\overline{z}_2 - z_2\overline{z}_1 + z_2\overline{z}_2 \leq 4$$

$$|z_1|^2 - z_1\overline{z}_2 - z_2\overline{z}_1 + |z_2|^2 \leq 4$$

$$1 - z_1\overline{z}_2 - z_2\overline{z}_1 + 1 \leq 4$$

$$z_1\overline{z}_2 + z_2\overline{z}_1 \geq -2$$

$$z_1\overline{z}_2 + \overline{z_1\overline{z}_2} \geq -2$$

$$2\,\text{Re}(z_1\overline{z}_2) \geq -2$$

$$\text{Re}(z_1\overline{z}_2) \geq -1$$

iii)

Επειδή $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$, ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των αριθμών z_1, z_2, z_3 είναι κύκλος με κέντρο $O(0, 0)$ και ακτίνα $\rho = 1$.

Λόγω της σχέσης $|z_1 - z_2| = |z_3 - z_1| = |z_2 - z_1|$ οι εικόνες των z_1, z_2, z_3 ισαπέχουν μεταξύ τους, οπότε το τρίγωνο, που έχει κορυφές αυτές τις εικόνες, είναι ισόπλευρο.

26.

Έστω η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}-\ln x$

i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού και τι σύνολο τιμών της f.

ii) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες.

iii) Αν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $g(x)=\ln x$ στο σημείο $A(\alpha, \ln\alpha)$ με $\alpha>0$ και η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $h(x)=e^x$ στο σημείο $B(\beta, e^\beta)$ ταυτίζονται, τότε να δείξετε ότι ο αριθμός α είναι ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$.

iv) Να αιτιολογήσετε το ότι οι C_g, C_h έχουν ακριβώς δύο κοινές εφαπτόμενες.

Προτεινόμενη λύση

i)

Για να ορίζεται η f πρέπει να ισχύουν $x-1\neq 0$ και $x>0$ $\Leftrightarrow$

$x\neq 1$ και $x>0$

Άρα $A_f=(0,\ 1)\cup(1,\ +\infty)$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο A_f με $f'(x)=-\dfrac{2}{(x-1)^2}-\dfrac{1}{x}=-\left[\dfrac{2}{(x-1)^2}+\dfrac{1}{x}\right]<0$

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα σε κάθε ένα από τα διαστήματα $(0,\ 1)$, $(1,\ +\infty)$.

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x+1}{x-1}-\ln x\right)=(-1)-(-\infty)=+\infty$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}\left(\frac{x+1}{x-1}-\ln x\right)=\left(\frac{2}{0^-}\right)-0=-\infty$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{x+1}{x-1}-\ln x\right)=\left(\frac{2}{0^+}\right)-0=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}-\ln x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{x-1}-\lim_{x\to+\infty}\ln x=1-(+\infty)=-\infty$$

Οπότε: Όταν $x\in(0,\ 1)$, το σύνολο τιμών της f είναι το $(-\infty,\ +\infty)$.

Όταν $x\in(1,+\infty)$, το σύνολο τιμών της f είναι το $(-\infty,\ +\infty)$

Άρα το σύνολο τιμών της f είναι το $f(A)=(-\infty,\ +\infty)$ (ας πούμε δύο φορές)

ii)

Όταν ο x διατρέχει το διάστημα $(0,\ 1)$ αποδείχθηκε ότι ο $f(x)$ διατρέχει το $(-\infty,\ +\infty)$ και αφού $0\in(-\infty,+\infty)$, η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ρίζα στο $(0,\ 1)$, μοναδική λόγω της μονοτονίας.

Ομοίως όταν ο x διατρέχει το διάστημα $(1,\ +\infty)$

iii)

Αρκεί να αποδείξουμε ότι $f(\alpha)=0$, δηλαδή $\dfrac{\alpha+1}{\alpha-1}-\ln\alpha=0$

Η εξίσωση της εφαπτομένης στο Α είναι $y - \ln\alpha = \frac{1}{\alpha}(x - \alpha) \Leftrightarrow$

$$y = \frac{1}{\alpha}x - 1 + \ln\alpha \qquad (\varepsilon_1)$$

Η εξίσωση της εφαπτομένης στο Β είναι $y - e^{\beta} = e^{\beta}(x - \beta) \Leftrightarrow$

$$y = e^{\beta}x - \beta e^{\beta} + e^{\beta} \qquad (\varepsilon_2)$$

Οι (ε_1), (ε_2) ταυτίζονται $\Leftrightarrow$ $\frac{1}{\alpha} = e^{\beta}$ και $\ln\alpha - 1 = -\beta e^{\beta} + e^{\beta}$

$\beta = -\ln\alpha$ και $\ln\alpha - 1 = -\beta e^{\beta} + e^{\beta}$

$\beta = -\ln\alpha$ και $\ln\alpha - 1 = \ln\alpha\, e^{-\ln\alpha} + e^{-\ln\alpha}$

$\beta = -\ln\alpha$ και $\ln\alpha - 1 = \ln\alpha \cdot \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha}$

$\beta = -\ln\alpha$ και $\alpha\ln\alpha - \alpha = \ln\alpha + 1$

$\beta = -\ln\alpha$ και $\alpha\ln\alpha - \ln\alpha = \alpha + 1$

$\beta = -\ln\alpha$ και $\ln\alpha\,(\alpha - 1) = \alpha + 1$

$\beta = -\ln\alpha$ και $\ln\alpha = \frac{\alpha + 1}{\alpha - 1}$

$\beta = -\ln\alpha$ και $0 = \frac{\alpha + 1}{\alpha - 1} - \ln\alpha$

iv)

Οι C_g, C_h έχουν ακριβώς δύο κοινές εφαπτόμενες $\overset{(iii)}{\Leftrightarrow}$
η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες που ισχύει από το (ii)

27.

Έστω f συνάρτηση συνεχής στο $\mathbb{R}$, τέτοια ώστε

$$\int_{-1}^{1} x\sqrt{x^2+3}\cdot f(x)dx = f(x) - \frac{1}{\sqrt{x^2+3}} \quad \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

i) Να βρείτε τον τύπο της f

ii) Να δείξτε ότι $f(t) \le f(x)$ για κάθε $t\in[x\,,\ x+1]$, όπου $x>0$

iii) **α)** Αν για τις συνεχείς συναρτήσεις $h,\ g$ ισχύει $h(x)\ge g(x)$ στο $[\alpha,\ \beta]$, να αποδείξετε ότι $\int_{\alpha}^{\beta} h(x)dx \ge \int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx$

β) Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_{x}^{x+1} f(t)dt$

Προτεινόμενη λύση

i)

Θέτουμε $\int_{-1}^{1} x\sqrt{x^2+3}\cdot f(x)dx = c$ **(1)**

Προσέξτε αυτή τη διαδικασία

Η υπόθεση γίνεται $c = f(x) - \dfrac{1}{\sqrt{x^2+3}} \Rightarrow f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+3}} + c$ **(2)**

$$(1) \overset{(2)}{\Rightarrow} \int_{-1}^{1} x\sqrt{x^2+3}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+3}}+c\right)dx = c$$

$$\int_{-1}^{1}\left(x + cx\sqrt{x^2+3}\right)dx = c$$

$$\int_{-1}^{1} xdx + c\int_{-1}^{1} x\sqrt{x^2+3}dx = c$$

$$\int_{-1}^{1} xdx + c\int_{-1}^{1} x\left(x^2+3\right)^{\frac{1}{2}}dx = c$$

$$\int_{-1}^{1} xdx + \frac{c}{2}\int_{-1}^{1}\left[\left(x^2+3\right)^{\frac{3}{2}}\right]'dx = c$$

$$\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{1} + \frac{c}{2}\left[\left(x^2+3\right)^{\frac{3}{2}}\right]_{-1}^{1} = c$$

$$0 + \frac{c}{2}\cdot 0 = c \quad\Rightarrow\quad c = 0$$

$$(2) \Rightarrow f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+3}}$$

ii)

Αρκεί να αποδείξουμε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[x,\ t]$

Είναι $f'(x) = \dfrac{-x}{(x^2+3)\sqrt{x^2+3}} < 0$, άρα f γνησίως φθίνουσα

iii)

α) $h(x) \geq g(x) \;\Rightarrow\; f(x) - g(x) \geq 0$

$$\int_{\alpha}^{\beta}(f(x) - g(x)dx \geq 0$$

$$\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx - \int_{\alpha}^{\beta}g(x)dx \geq 0$$

$$\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx \geq \int_{\alpha}^{\beta}g(x)dx$$

Η μονοτονία στην απόδειξη ανισότητας

β) $0 < x \leq t \leq x+1 \overset{(ii)}{\Rightarrow} f(x) \geq f(t) \geq f(x+1)$

$$\frac{1}{\sqrt{(x+1)^2+3}} \leq f(t) \leq \frac{1}{\sqrt{x^2+3}}$$

με βάση το (α) $$\int_{x}^{x+1}\frac{1}{\sqrt{(x+1)^2+3}}dt \leq \int_{x}^{x+1}f(t)dt \leq \int_{x}^{x+1}\frac{1}{\sqrt{x^2+3}}dt$$

$$\frac{1}{\sqrt{(x+1)^2+3}}\int_{x}^{x+1}1dt \leq \int_{x}^{x+1}f(t)dt \leq \frac{1}{\sqrt{x^2+3}}\int_{x}^{x+1}1dt$$

$$\frac{1}{\sqrt{(x+1)^2+3}} \leq \int_{x}^{x+1}f(t)dt \leq \frac{1}{\sqrt{x^2+3}}$$

Όμως $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+3}} = \left(\frac{1}{+\infty}\right) = 0$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{(x+1)^2+3}} = \left(\frac{1}{+\infty}\right) = 0$

Οπότε από το κριτήριο παρεμβολής θα είναι και $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_{x}^{x+1}f(t)dt = 0$

28.

Μεγάλης δυσκολίας

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:[2011,\ 2012]\to\mathbb{R}^*$ και η

$$g(x)=\int_{2011}^{x}f(t)dt+\int_{2012}^{x}f(t)dt\,,\ x\in[2011,\ 2012]$$

Αν $\int_{2011x}^{2012x}\frac{t}{x^2}\,f\left(\frac{t}{x}\right)dt=1006$ και το εμβαδόν E του χωρίου που ορίζεται από τη C_f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=2011$, $x=2012$ είναι ίσο με 1, τότε

i) δείξτε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_o\in(2011,\ 2012)$ ώστε $f(x_o)=\frac{1006}{x_o}$

ii) μελετήστε την g ως προς τη μονοτονία και βρείτε τα τοπικά ακρότατα αυτής

iii) υπολογίστε το $\int_{2011}^{2012}g(x)dx$

Προτεινόμενη λύση

i)

$$\int_{2011x}^{2012x}\frac{t}{x^2}\,f\left(\frac{t}{x}\right)dt=1006 \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{x^2}\int_{2011x}^{2012x}t\cdot f\left(\frac{t}{x}\right)dt=1006 \quad \textbf{(1)}$$

Θέτουμε $\frac{t}{x}=u$ οπότε $du=\frac{1}{x}dt$

Όταν $t=2011x$ τότε $u=2011$ και όταν $t=2012x$ τότε $u=2012$

Η (1) γίνεται $\frac{1}{x^2}\int_{2011}^{2012}xu\cdot f(u)xdu=1006$

$$\int_{2011}^{2012}uf(u)du=1006 \quad \textbf{(2)}$$

Το $\int_{\alpha}^{\beta}f(ct)dt$ οδηγεί σε αλλαγή μεταβλητής

Αναζητάμε ρίζα της εξίσωσης $f(x)=\frac{1006}{x}$ στο διάστημα $(2011, 2012)$

» » $xf(x)=1006$ » »

» » $xf(x)-1006=0$ » »

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi(x)=\int_{2011}^{x}tf(t)dt-1006x\,,\ x\in[2011\,,\ 2012]$

Τότε $\varphi'(x)=xf(x)-1006$

Πάμε για Rolle

$\varphi(2011)=\int_{2011}^{2011}tf(t)dt-1006\cdot2011=0-1006\cdot2011$

$\varphi(2012)=\int_{2011}^{2012}tf(t)dt-1006\cdot2012\overset{(2)}{=}1006-1006\cdot2012=-1006\cdot2011$

Άρα $\varphi(2011)=\varphi(2012)$

Επομένως για τη συνάρτηση φ, ισχύει το θεώρημα Rolle στο διάστημα $[2011,\ 2012]$, οπότε υπάρχει ρίζα της $\varphi'(x)=xf(x)-1006$ στο $(2011,\ 2012)$

ii)

$$g(x)=\int_{2011}^{x} f(t)dt+\int_{2012}^{x} f(t)dt \quad\Rightarrow\quad g'(x)=f(x)+f(x)$$

$$g'(x)=2f(x) \qquad \textbf{(3)}$$

Επειδή η f είναι συνεχής με $f(x)\neq 0$, θα διατηρεί σταθερό πρόσημο .

Και επειδή $f(x_o)=\dfrac{1006}{x_o}>0$, θα είναι $f(x)>0$ για κάθε $x\in[2011,\ 2012]$

Επομένως $g'(x)>0$, άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο $[2011,\ 2012]$

Οπότε $g_{min}=g(2011)=\int_{2012}^{2011} f(t)dt$ και $g_{max}=g(2012)=\int_{2011}^{2012} f(t)dt$ **(4)**

Όμως $E=1 \quad\Rightarrow\quad \int_{2011}^{2012} f(t)dt=1$

(4) $\Rightarrow$ $g_{min}=-1$ και $g_{max}=1$

iii)

$$\int_{2011}^{2012} g(x)dx = \int_{2011}^{2012} x'g(x)dx = \left[xg(x)\right]_{2011}^{2012}-\int_{2011}^{2012} xg'(x)dx$$

$$\overset{(3)}{=} \left[xg(x)\right]_{2011}^{2012}-\int_{2011}^{2012} 2xf(x)dx =$$

$$= \left[xg(x)\right]_{2011}^{2012}-2\int_{2011}^{2012} xf(x)dx$$

$$\overset{(2)}{=} 2012\,g(2012)-2011g(2011)\ -2\cdot 1006$$

$$= 2012+2011\ -1012=2011$$

Μη φοβάστε τα μεγάλα νούμερα,
δεν προσθέτουν δυσκολία

29.

Έστω η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{2x}{x^2+4}$, $x\in[0,2]$

i) Να εξετάσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

ii) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται , και θεωρώντας ότι η f^{-1} είναι συνεχής δείξτε ότι $\int_0^2 f(x)dx+\int_0^{\frac{1}{2}} f^{-1}(x)dx=1$

Προτεινόμενη λύση

i)

Είναι $f'(x)=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots=\dfrac{8-2x^2}{(x^2+4)^2}>0$ για κάθε $x\in[0,2)$.

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0,\ 2]$

$f_{min}=f(0)=0$ και $f_{max}=f(2)=f(x)=\dfrac{2\cdot 2}{2^2+4}=\dfrac{1}{2}$

Σύνολο τιμών της f : $f(A)=\left[0,\ \dfrac{1}{2}\right]$

Διαδικασία για την ολο-κλήρωση της αντίστροφης

ii)

Αφού η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,\ 2]$, είναι και ‘1 – 1’ οπότε αντιστρέφεται.

Για το ολοκλήρωμα $I=\int_0^{\frac{1}{2}} f^{-1}(x)dx$ θέτουμε $f^{-1}(x)=u \Rightarrow f(f^{-1}(x))=f(u)$

$x=f(u)$ **(1)**

οπότε και $dx=f'(u)\,du$

Νέα άκρα ολοκλήρωσης :

Όταν $x=0$, η (1) $\Rightarrow 0=f(u) \Rightarrow 0=\dfrac{2u}{u^2+4} \Rightarrow u=0$

Όταν $x=\dfrac{1}{2}$, η (1) $\Rightarrow \dfrac{1}{2}=f(u) \Rightarrow \dfrac{1}{2}=\dfrac{2u}{u^2+4} \Rightarrow u^2+4=2u \Rightarrow u=2$

Άρα $I=\int_0^2 uf'(u)du=\int_0^2 xf'(x)dx$

Το άθροισμα : $\int_0^2 f(x)dx+\int_0^{\frac{1}{2}} f^{-1}(x)dx=\int_0^2 f(x)dx+\int_0^2 xf'(x)dx$

$$=\int_0^2 f(x)dx+[xf(x)]_0^2-\int_0^2 f(x)dx$$

$$=2\,f(2)=2\cdot\frac{1}{2}=1$$

30.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x^2+1}-x$, $x\in\mathbb{R}$

i) Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$

ii) Να βρείτε την πλάγια ασύμπτωτη της f στο $-\infty$

iii) Να αποδείξετε ότι $f'(x)\cdot\sqrt{x^2+1}+f(x)=0$

iv) Να αποδείξετε ότι $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx=\ln(\sqrt{2}+1)$

Προτεινόμενη λύση

i)

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+1}-x) = \cancel{+\infty-(+\infty)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{\sqrt{x^2+1}+x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} = \left(\frac{1}{+\infty}\right)=0$$

ii)

$$\lambda = \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}-x}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-x}{x} \qquad (\text{ κοντά στο } -\infty)$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-x}{x}$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\left(-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-1\right) = -2$$

$$\beta = \lim_{x\to-\infty}\big(f(x)-\lambda x\big) = \lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+1}+x\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)}{\sqrt{x^2+1}-x}\right)$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{+\infty-(-\infty)}\right) = \left(\frac{1}{+\infty}\right)=0$$

Επομένως πλάγια ασύμπτωτη στο $-\infty$ είναι η ευθεία $y=-2x$

iii)

$$f(x)=\sqrt{x^2+1}-x \quad\Rightarrow\quad f'(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}-1$$

$$f'(x)\sqrt{x^2+1} = x-\sqrt{x^2+1}$$

$$f'(x)\sqrt{x^2+1} = -\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$$

$$f'(x)\sqrt{x^2+1} = -f(x)$$

$$f'(x)\sqrt{x^2+1} + f(x) = 0$$

iv)

Είναι $f(x) \neq 0$, διότι αν για κάποιο x ήταν $f(x) = 0$, τότε

$\sqrt{x^2+1} - x = 0$

$\sqrt{x^2+1} = x$

$x^2 + 1 = x^2$

$1 = 0$ που είναι άτοπο

Προσέξτε αυτή τη διαδικασία

Από (iii) έχουμε $f\,'(x)\cdot\sqrt{x^2+1} + f(x) = 0 \Rightarrow -\dfrac{f\,'(x)}{f(x)} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

Οπότε $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx = \int_0^1 -\frac{f'(x)}{f(x)}dx$

$$= -\left[\ln|f(x)|\right]_0^1$$

$$= -\ln|f(1)| + \ln|f(0)|$$

$$= -\ln(\sqrt{2}-1) + \ln 1$$

$$= \ln(\sqrt{2}-1)^{-1}$$

$$= \ln\frac{1}{\sqrt{2}-1}$$

$$= \ln\frac{\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} = \ln(\sqrt{2}+1)$$